B/ On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+1)e^{-x}$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

On note C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Vérifier que C_f et C_g passent par $A(0,1)$.
Montrer que C_f et C_g admettent en ce point la même tangente.

2. a. Vérifier que $f(x)-g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$.

b. Etudier le signe de $f(x)-g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire la position relative de C_f et C_g.

3. a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=-(2x+3)e^{-x}$.
Vérifier que $F'(x)=f(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.

b. En déduire la primitive sur $\mathbb{R}$ de $f-g$ qui s'annule en 0.

36 A/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$.
et on note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(t)=\dfrac{t}{1+t}-\ln(1+t)$.
Etudier les variations de g sur $[0,+\infty[$ et en déduire le signe de $g(t)$.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x)=e^{-x}\left[\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}-\ln(1+e^{x})\right]$.

b. Etudier le sens de variations de f.

3. a. Montrer que pour tout réel x, $f(x)=xe^{-x}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})$.

b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

4. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe C.

B/ On considère la suite (u_n) définie par
$\begin{cases} u_0=0.5, \\ u_{n+1}=f(u_n), n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

1. a. Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution notée α. Montrer que $0.5\le x\le 0.6$.

b. Démontrer que pour tout réel x tel que $0.5\le x\le 0.6$, $0.5\le f(x)\le 0.6$ et $-0.25\le f'(x)\le 0$.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha|\le 0.25|u_n-\alpha|$.

Montrer par récurrence que $|u_n-\alpha|\le (0.25)^n\times 0.1$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

c. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n\ge n_0$, $|u_n-\alpha|\le 5\times 10^{-4}$.

C/ L'objet de cette partie est l'étude d'une primitive de f.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)+f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

2. En utilisant la question précédente, calculer une primitive F de f.

37 Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On se propose d'étudier, pour tout entier $n>0$, les fonctions f_n définies sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}\right)e^{-x}$.

1. a. Justifier que f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

c. Etudier le sens de variation de f_n.

2. a. Montrer que pour tout réel $x\in[0,1]$, $\dfrac{-1}{n!}\le f_n'(x)\le 0$.

b. En déduire que $\dfrac{-1}{n!}\le f_n(x)-1\le 0$.